



F. Pompili – M- Incurvati
**STUDIO DELL'EQUAZIONE
DIFFERENZIALE**
 $ma(t)=F-bv^2(t)$

LUGLIO 2005 - SxT Scaffali N°6

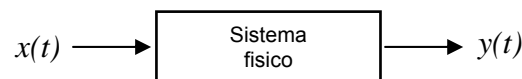


Introduzione

Se la matematica è il linguaggio della scienza moderna, le equazioni differenziali sono indubbiamente le frasi più ricorrenti di tale linguaggio: innumerevoli fenomeni naturali e umani sono descritti in modo efficace e sintetico da equazioni differenziali, dal moto dei pianeti alla crescita di una colonia di batteri, dai decadimenti radioattivi all'economia, dai fenomeni di diffusione alla propagazione delle onde.

In generale, la descrizione matematica dei fenomeni naturali dà luogo a due grandi categorie di modelli matematici o "sistemi": i sistemi di *ordine zero* o "senza memoria", e i cosiddetti *sistemi dinamici*. I primi vengono descritti da equazioni algebriche, i secondi da equazioni differenziali.

Per chiarire il concetto, supponiamo di avere un sistema fisico che fornisca un'uscita $y(t)$ in risposta ad un ingresso $x(t)$.



Se il sistema fosse costituito da una resistenza elettrica R , ad esempio, $x(t)$ potrebbe essere la tensione impressa e $y(t)$ la corrente che vi scorre; se invece il sistema fosse un punto materiale di massa m , allora $x(t)$ potrebbe essere la forza applicata al punto e $y(t)$ la sua posizione nello spazio.

In un sistema di ordine zero il valore istantaneo dell'uscita dipende solo dal valore istantaneo dell'ingresso ossia il valore di y al tempo t dipende solo dal valore di x al tempo t indipendentemente dai valori assunti da x negli istanti precedenti. Tale proprietà conduce ad una descrizione matematica per mezzo di equazioni algebriche. Una resistenza elettrica R è quindi un sistema di ordine zero, poiché è descritta da una semplice equazione algebrica nota come "legge di Ohm" che lega i valori istantanei della corrente $i(t)$ e della tensione $v(t)$.

$$i(t) = \frac{1}{R} v(t) \quad \text{ossia} \quad y(t) = \frac{1}{R} x(t)$$

Un punto materiale di massa m è invece un sistema dinamico poiché non basta sapere il valore della forza applicata al tempo t per conoscerne la posizione nello spazio al medesimo istante ma è necessario sapere il valore della forza anche in tutti gli istanti precedenti. Tale proprietà conduce ad una descrizione matematica che fa uso di equazioni differenziali, ed è proprio il caso del punto materiale, la cui legge del moto soddisfa una nota equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$F = ma \quad \text{ossia} \quad x(t) = m\ddot{y}(t)$$

In pratica nel mondo reale non esistono sistemi di ordine zero: essi sono frutto delle semplificazioni introdotte nella nostra descrizione matematica dei fenomeni. La legge di Ohm descrive bene il comportamento di una resistenza elettrica nella maggior parte dei casi di interesse pratico, ma si tratta pur sempre di un'approssimazione che può talvolta rivelarsi grossolana. L'importante è saperlo, cioè ricordare che i modelli matematici non sono la realtà ma solo una sua rappresentazione opportunamente semplificata in funzione dei nostri scopi e dei mezzi a nostra disposizione.

Analisi qualitativa della soluzione

Le equazioni differenziali si dividono in moltissime categorie: per alcune è sempre possibile trovare una soluzione analitica, per altre è possibile solo in casi particolari, per altre ancora non esistono o non si conoscono metodi generali per risolverle. In questi ultimi casi si ricorre spesso a soluzioni numeriche ottenute con l'ausilio dei calcolatori.

Sebbene in generale non sia facile risolvere un'equazione differenziale, esistono molti casi in cui, pur senza calcolare esplicitamente le soluzioni, è possibile ricavare molte informazioni sulla forma e sull'andamento delle soluzioni stesse solo tramite un'analisi qualitativa.

L'equazione differenziale proposta è non lineare del secondo ordine ed è uno dei pochi casi di equazioni differenziali non lineari per i quali è possibile trovare una soluzione analitica.

$$[i] \quad ma(t) = F - bv^2(t)$$

L'equazione descrive il moto di un corpo sottoposto ad una forza esterna F e ad una forza di attrito proporzionale al quadrato della velocità.

La dipendenza della forza di attrito dal quadrato della velocità è caratteristica, entro certi limiti, del moto dei corpi in un fluido viscoso a bassa densità come può essere l'atmosfera terrestre.

Si osservi che l'equazione [i] descrive il moto suddetto solo nel caso in cui la forza F abbia segno positivo e quindi si opponga alla forza di attrito $-bv^2(t)$.

Se F fosse negativa, ci troveremmo di fronte a una situazione "non fisica" in cui l'attrito concorrerebbe ad aumentare l'energia cinetica del corpo anziché dissiparla.

Una forma più generale che descrive l'equazione del moto indipendentemente dal segno della forza esterna è la seguente:

$$[ii] \quad ma(t) = F - bv(t)|v(t)|$$

in cui, più correttamente, il segno della forza di attrito è sempre opposto al segno della velocità e non a quello della forza, proprio ad indicare il fatto che l'attrito è una forza che tende ad opporsi al moto.

Supposto $F > 0$ e quindi $v > 0$, possiamo cominciare lo studio dell'equazione [i] mediante alcune osservazioni di carattere qualitativo.

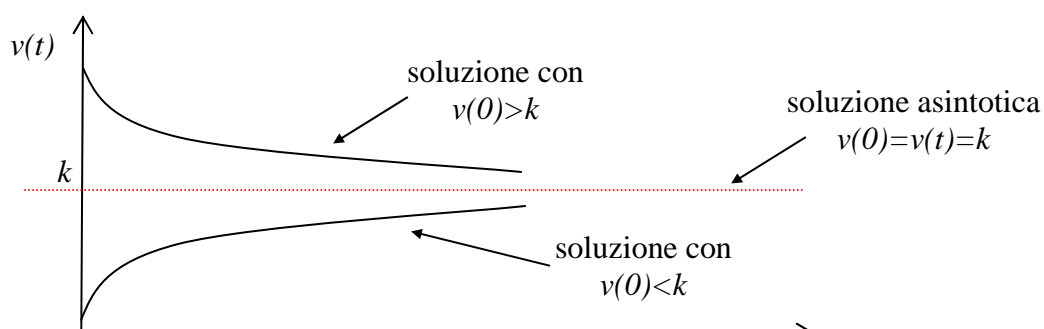
La prima è che sicuramente esiste una soluzione “banale” a velocità costante ossia $v(t) = k$ cioè $x(t) = kt + x_0$. Esiste infatti una velocità k alla quale la forza di attrito è uguale ed opposta alla forza esterna, quindi l'accelerazione è nulla e la velocità è costante. Tale velocità si trova imponendo $F = bv^2(t)$ nella [i], ossia $F = bk^2$, da cui:

$$[iii] \quad k = \sqrt{\frac{F}{b}}$$

La seconda osservazione è che se la velocità iniziale è minore di k il corpo tenderà ad accelerare fino a raggiungere la velocità k mentre se la velocità iniziale è maggiore di k , il corpo tenderà a rallentare fino a raggiungere la velocità k . Ci si può allora domandare se tale velocità venga raggiunta in un tempo finito o infinito, cioè se la soluzione banale $x(t) = kt + x_0$ sia una soluzione asintotica.

Se la soluzione a velocità costante non fosse asintotica, esisterebbero delle soluzioni che partendo da una velocità $v < k$ aumenterebbero progressivamente la loro velocità fino a raggiungere il valore $v = k$ in un tempo finito T . A quel punto, essendo nulla l'accelerazione, la velocità non potrebbe più aumentare e il moto proseguirebbe a velocità costante per tutti i tempi $t > T$.

Ciò comporterebbe che al tempo $T_1 > T$ due corpi identici potrebbero trovarsi ad avere la stessa posizione e la stessa velocità pur essendo partiti da condizioni iniziali diverse. Ciò è in contraddizione con il teorema di unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali e quindi la soluzione a velocità costante deve essere asintotica, cioè non può essere raggiunta in un tempo finito. Oltre alla soluzione banale, ci aspettiamo quindi due famiglie di soluzioni: quelle con velocità iniziale maggiore di k e quelle con velocità iniziale minore di k . Entrambe tendono asintoticamente alla soluzione limite come mostra la figura alla pagina seguente.



Calcolo della soluzione

Riscriviamo l'equazione usando la notazione in cui $x(t)$ è la soluzione da trovare, $\dot{x}(t)$ è la sua derivata prima e $\ddot{x}(t)$ la sua derivata seconda. Per semplificare ulteriormente la notazione omettiamo di indicare la dipendenza temporale, per cui scriveremo x anziché $x(t)$ e così via.

$$[1] \quad m\ddot{x} + b(\dot{x})^2 - F = 0$$

La semplice sostituzione di variabile $\dot{x} = y$ trasforma la [1] in una equazione differenziale non lineare del primo ordine:

$$[2] \quad \dot{y} + \frac{b}{m} y^2 - \frac{F}{m} = 0$$

ossia:

$$[3] \quad \frac{dy}{dt} = \frac{F}{m} - \frac{b}{m} y^2$$

La [3] è un'equazione del tipo “a variabili separabili”, in cui cioè è possibile concentrare in ciascun membro la dipendenza da una singola variabile. Infatti, con semplici manipolazioni algebriche, otteniamo:

$$[4] \quad \frac{dy}{F - by^2} = \frac{dt}{m}$$

in cui il primo membro è solo funzione di y mentre il secondo membro dipende solo da t . Tali equazioni si risolvono integrando separatamente i due membri nelle rispettive variabili, sempre che si sappiano calcolare gli integrali!

Procediamo all'integrazione della [4]. Con semplici passaggi si ottiene:

$$[5] \quad \frac{dy}{\left(y^2 - \frac{F}{b}\right)} = -\frac{b}{m} dt$$

Sia $k^2 = \frac{F}{b}$. La [5] diventa:

$$[6] \quad \frac{dy}{(y^2 - k^2)} = -\frac{b}{m} dt$$

La [6] è facilmente integrabile da ambo i membri:

$$[7] \quad \int \frac{dy}{y^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{y-k}{y+k} \right| + C_1 = -\frac{b}{m} t$$

Per ricavare $y(t)$ è necessario rimuovere il valore assoluto dall'argomento del logaritmo, ma per fare ciò occorre considerare il significato fisico della [7]. Come abbiamo dedotto dall'analisi qualitativa, il moto raggiunge asintoticamente una velocità limite $y = k$ ma esistono due famiglie di soluzioni, quelle a velocità $y < k$ (caratterizzate da una velocità iniziale $v_0 = y(0)$ minore di k), e quelle a velocità $y > k$ (caratterizzate da una velocità iniziale $v_0 = y(0)$ maggiore di k). La [7] le contiene entrambe.

Nella regione $0 \leq y < k$ si ha $\frac{y-k}{y+k} < 0$ e quindi, per rimuovere il valore assoluto, dobbiamo invertire il segno della funzione. La [7], quindi, diventa:

$$[8] \quad \int \frac{dy}{y^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{k-y}{k+y} \right) + C_1 = -\frac{b}{m} t$$

A questo punto possiamo procedere a ricavare la y .

$$[9] \quad \ln \left(\frac{k-y}{k+y} \right) + C_2 = -\frac{2kb}{m} t = -\gamma t$$

ove si è posto $\gamma = \frac{2kb}{m}$.

Applicando l'operatore esponenziale ad ambo i membri della [9] si ottiene:

$$[10] \quad \frac{k-y}{k+y} = Ce^{-\eta}$$

ove C è una costante che sarà ricavata imponendo le condizioni iniziali.

Isolando la y , si ha:

$$[11] \quad y(t) = k \frac{1 - Ce^{-\eta}}{1 + Ce^{-\eta}}$$

Nella regione $y > k$ invece, si ha $\frac{y-k}{y+k} > 0$ e quindi il valore assoluto nella [7] può essere rimosso senza cambiare il segno della funzione. La [7], allora, diventa:

$$[12] \quad \int \frac{dy}{y^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{y-k}{y+k} \right) + C_1 = -\frac{b}{m} t$$

Ripetendo il procedimento seguito nel caso $0 \leq y < k$ si ottiene:

$$[13] \quad y(t) = k \frac{1 + Ce^{-\eta}}{1 - Ce^{-\eta}}$$

Riassumendo, se includiamo anche la soluzione “banale” $y=k$, abbiamo trovato tre famiglie di soluzioni per la velocità:

$$[14] \quad \begin{cases} y(t) = k \frac{1 - Ce^{-\eta}}{1 + Ce^{-\eta}} & 0 \leq y < k \\ y(t) = k & \\ y(t) = k \frac{1 + Ce^{-\eta}}{1 - Ce^{-\eta}} & y > k; C \neq 1 \end{cases}$$

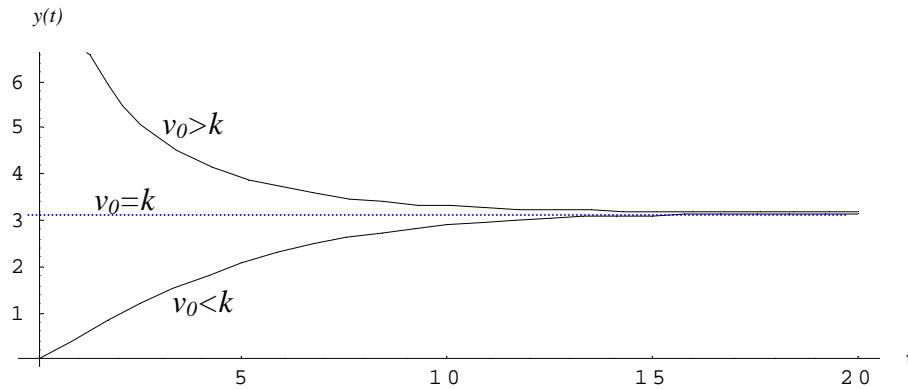
Essendo $y(t) > 0$, deve valere la condizione $0 < C < 1$. Le soluzioni [14] possono essere scritte nella forma più compatta:

$$[15] \quad y(t) = k \frac{1 - Ce^{-\eta}}{1 + Ce^{-\eta}}$$

se si assume la nuova condizione $-1 < C \leq 1$.

La costante C viene determinata imponendo che la velocità iniziale v_0 sia uguale a $y(0)$. Il valore $C=0$ individua la soluzione asintotica $y(t)=k$.

La figura seguente mostra l'andamento di tre soluzioni caratterizzate da una diversa velocità iniziale v_0 . La soluzione asintotica è indicata in tratteggio.



La [15] però non è ancora la soluzione cercata ma la sua derivata, avendo noi posto $\dot{x} = y$. Per trovare le soluzioni $x(t)$, dovremo quindi procedere ad un'ulteriore integrazione.

Partiamo dalla [15] ed eseguiamo la divisione tra i binomi al numeratore e al denominatore:

$$[16] \quad \frac{y}{k} = \frac{1 - Ce^{-\gamma t}}{1 + Ce^{-\gamma t}} = 1 - \frac{2Ce^{-\gamma t}}{1 + Ce^{-\gamma t}}$$

Quindi:

$$[17] \quad \frac{1}{k} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{2Ce^{-\gamma t}}{1 + Ce^{-\gamma t}}$$

Integriamo la [17]:

$$[18] \quad \frac{x(t)}{k} = \int \left(1 - \frac{2Ce^{-\gamma t}}{1 + Ce^{-\gamma t}} \right) dt + D_1 \Rightarrow \frac{x(t)}{k} = t + D_1 - 2 \int \frac{Ce^{-\gamma t}}{1 + Ce^{-\gamma t}} dt$$

Per calcolare l'integrale al secondo membro, si ponga $z = Ce^{-\gamma t}$. Allora, si ha:

$$[19] \quad dz = -\gamma(Ce^{-\gamma t}) dt \Rightarrow (Ce^{-\gamma t}) dt = -\frac{1}{\gamma} dz$$

Sostituendo nell'integrale:

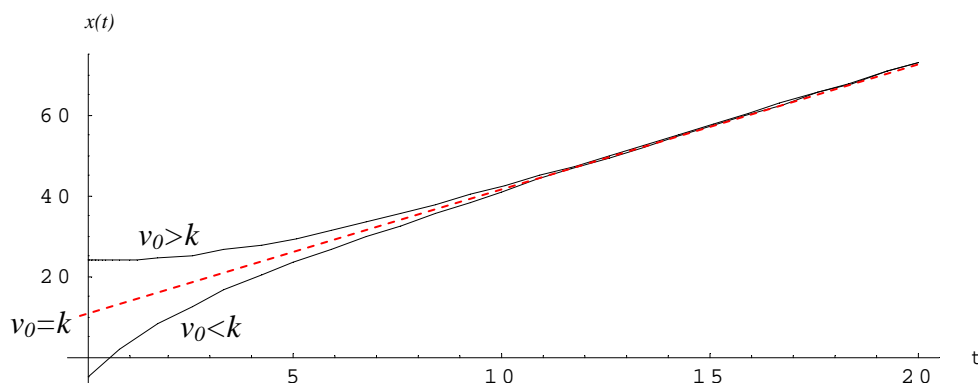
$$[20] \quad \int \frac{Ce^{-\gamma t}}{1+Ce^{-\gamma t}} dt = -\frac{1}{\gamma} \int \frac{dz}{1+z} = -\frac{1}{\gamma} \ln|1+z| + D_2 = -\frac{1}{\gamma} \ln(1+Ce^{-\gamma t}) + D_2$$

Sostituendo la [20] nella [18] troviamo le soluzioni:

$$[21] \quad x(t) = kt + q + \frac{2k}{\gamma} \ln(1+Ce^{-\gamma t}) \quad -1 < C \leq 1$$

Le costanti q e C si calcolano imponendo le condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = y(0) = v_0$.

La figura seguente mostra l'andamento di tre soluzioni caratterizzate da una diversa velocità iniziale $v_0 = y(0)$. La soluzione asintotica $x(t) = kt + q$ è indicata in tratteggio.



La validità delle soluzioni [21] può essere verificata per sostituzione diretta nell'equazione differenziale [1].